где $f: R^1 \times R^n \times R^n \to R^n$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему условию

$$f(t, -x, -y) = -f(t, x, y).$$

Нас будет интересовать задача существования решений уравнения (2), определенных на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$L_i(x(\cdot)) = 0, i = 1, 2, ..., k \tag{3}$$

$$\max_{t \in [0,T]} ||x(t)|| = N, \tag{4}$$

где N – некоторое фиксированное положительное число.

Обозначим $\sum_{N,L}([0,T])$ множество решений задачи (2, 3, 4). Дадим операторную трактовку задачи (2), (3), (4).

Пусть $\widehat{f}: D(M) \to C_{[0,T]}$ — оператор суперпозиции, опеределенный следующим образом:

$$y(t) = \widehat{f}(x)(t) = f(t, x(t), x'(t)).$$

Рассмотрим оператор $g: C_{[0,T]} \to C_{[0,T]} \times R^k$ такой, что $g(x) = (\widehat{f}(x), 0)$.

Л е м м а 2. *Оператор g является нечетным и M -вполне непрерывным.*

На основе предыдущих лемм и теоремы доказывается следующее утверждение:

Т е о р е м а 2. *При сделанных предположениях множество $\sum_{N,L}([0,T]) \neq \emptyset$ и $dim(\sum_{N,L}([0,T])) \geqslant 2n - k - 1$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельман Б.Д., Рыданова С.С.* Об операторных уравнениях с сюрьективными операторами // Вестник ВГУ. Серия: физика, математика. 2012. № 1. С. 93-98.

2. *Рыданова С.С.* Теорема Борсука–Улама для квазиобратимых операторов // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2012. 2012. С. 193-195.

Gubina S.S. THEOREM BORSUK-ULAM FOR QUASIINVERTIBILITY OPERATORS. SOME APPLICATIONS

The new version of the infinite-dimensional Borsuk-Ulam, which surjective operator A is a quasi-reversible and is an application of this theore is discussed.

Key words: surjective operator; quasiinvertibility operator; odd mapping.

УДК 517.977.1

ВНУТРЕННИЕ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© **М.И. Гусев**

Ключевые слова: управляемая система; множество достижимости; фазовые ограничения; метод штрафных функций.

Рассматривается задача об аппроксимации множеств достижимости нелинейной управляемой системы с фазовыми ограничениями, заданными в виде неравенства или системы неравенств. Изучается аналог метода штрафных функций, состоящий в замене исходной системы с фазовыми ограничениями вспомогательной системой без ограничений, посредством сужения множества скоростей исходной системы. Доказана сходимость аппроксимирующих множеств в хаусдорфовой метрике и получена оценка скорости сходимости.

В [1] предложена процедура замены дифференциального включения с выпуклым фазовым ограничением семейством дифференциальных включений без фазовых ограничений, позволяющая получить внешние аппроксимации для траекторных трубок и множеств достижимости. В [2] рассмотрен аналог метода внутренних штрафных функций для внутренней аппроксимации множества достижимости нелинейной системы с фазовым ограничением, заданным в виде множества уровня гладкой функции. В данной работе результаты [2] распространяются на фазовые ограничения, заданные в виде системы неравенств, кроме того получены оценки точности аппроксимации. Метод получения оценок опирается на результаты статьи [3].

Рассматривается нелинейная управляемая система

$$\dot{x} = f(x,u), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$. Ограничение на управление имеет вид $u(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$, где U — компакт в $\mathbb{R}^r$, в качестве управлений рассматриваем измеримые функции $u : [t_0, t_1] \to U$.

Будем далее считать, что отображение $f(x,u) : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $f(x,u)$ непрерывно и локально липшицево по x равномерно по u; 2) выполнено условие подлинейного роста: $\exists C > 0$, $\|f(x,u)\| \leqslant C(1 + \|x\|)$, $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times U$;
3) множество $f(x,U)$ выпукло для любого x.

Пусть фазовые ограничения для системы (1) заданы в виде $x(t) \in S$, где множество S – непустое компактное множество, представимое как множество решений системы неравенств: $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, ..., m\}$, $g_i(x)$, $i = 1, ..., m$, — непрерывно дифференцируемые функции. Для каждого $x \in S$ обозначим $I(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$. Будем далее предполагать, что выполнены следующие условия.

У с л о в и е 1. Для каждого $x \in S$, если $I(x) \neq \emptyset$, то векторы-градиенты $\nabla g_i(x)$, $i \in I(x)$, линейно независимы.

У с л о в и е 2. Для каждого $x \in \partial S$ и ненулевого вектора $p = \sum_{i \in I(x)} \lambda_i \nabla g_i(x)$, $\lambda_i \geqslant 0$, выполнено неравенство $\min_{u \in U} p^\top f(x,u) < 0$.

Последнее условие обеспечивает слабую инвариантность фазовых ограничений относительно управляемой системы, т. е. для любого начального состояния $x(t_0) = x^0 \in S$ существует траектория системы (1), удовлетворяющая ограничению $x(t) \in S$, $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть $k > 0$. Определим множество $U_k(x) = \{u \in U : \nabla g_i^\top(x) f(x,u) \leqslant -k g_i(x),\ i = 1, ..., m\}$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть выполнены Условия* 1, 2. *Существует* $k_0 > 0$ *такое, что при* $k \geqslant k_0$ $U_k(x) \neq \emptyset$ $\forall x \in S$.

Пусть $\theta \in [t_0, t_1]$, $x^0 \in S$. Обозначим через $G(\theta)$ множество достижимости в момент θ для системы (1) с фазовыми ограничениями $x(t) \in S$, $t \in [t_0, t_1]$ из начального состояния $x(t_0) = x^0$. Пусть $G_k(\theta)$ — множество достижимости для системы $\dot{x} = f(x,u)$, $u \in U_k(x)$, из того же начального состояния.

У т в е р ж д е н и е 2. *При достаточно больших* k $G_k(\theta) \neq \emptyset$, $G_{k_1}(\theta) \subset G_{k_2}(\theta) \subset G(\theta)$ *при* $k_1 < k_2$.

Пусть $\hat{S}$ — замыкание дополнения S в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $d(x) = \min_{y \in \hat{S}} \|x - y\|$, $d(x)$ — евклидово расстояние от x до $\hat{S}$.

Л е м м а 1. *Пусть* $m = 1$, *то есть* $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) \leqslant 0\}$, *и пусть выполнено условие* 1, *которое в данном случае эквивалентно требованию, чтобы* $\nabla g_1(x) \neq 0$ *при* $g(x) = 0$. *Тогда существует константа* $L > 0$ *такая, что* $d(x) \leqslant -L g_1(x)\ \forall x \in S$.

Л е м м а 2. *Пусть функции* $g_i(x)$, $i = 1, ..., m$, *выпуклы и удовлетворяют условию Слейтера:* $\exists \bar{x} \in S$, $g_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1, ..., m$. *Тогда существует константа* $L > 0$ *такая, что* $d(x) \leqslant -L g(x)\ \forall x \in S$, *где* $g(x) = \max_i g_i(x)$.

Заметим, что из условия 1 следует условие Слейтера. Обозначим через $h(A,B)$ хаусдорфово расстояние между ограниченными множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 1. *Если $m=1$, ограничения задачи удовлетворяю условиям 1, 2 и x^0 — внутренняя точка S, то существуют $k_0>0, M>0$ такие, что для любого $k>k_0$ справедливо неравенство*

$$h(G_k(\theta), G(\theta)) \leqslant M\frac{1}{k} . \tag{2}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть функции $g_i(x)$, $i=1,...,m$, выпуклы и удовлетворяют условиям 1, 2 и x^0 — внутренняя точка S. Тогда существуют $k_0>0, M>0$ такие, что для любого $k>k_0$ справедливо неравенство* (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.* Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц.уравнения/ 1987. Т. 23/ № 8. С. 1303-1315.

2. *Гусев М.И.* О методе штрафных функций в задаче построения множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. ИММ УрО РАН/ 2013. Т. 19/ № 1. С. 81–86.

3. *Stern R.J.* Characterization of the State Constrained Minimal Time Function // SIAM J. Control and Optimization 2004. V. 43. № 2. P. 697-707.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1019) и гранта РФФИ 12-01-00261.

Gusev M.I. INTERNAL APPROXIMATIONS OF REACHABLE SETS OF NONLINEAR CONTROL SYSTEM WITH STATE CONSTRAINTS

The paper is devoted to the problem of approximating of reachable sets of a nonlinear control system with state constraints given by the system of inequalities. An analog of a penalty function method is proposed which consists in replacing of the primary system by auxiliary system without state constraints. It is shown that a reachable set of the primary system may be approximated in Hausdorff metric by the reachable sets of auxiliary system and the estimates of the rate of convergence are given.

Key words: control system; reachable set; state constraints; penalty function method.

УДК 519.853.4

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА СОВМЕСТНОСТИ

© **Б.В. Дигас**

Ключевые слова: невыпуклая оптимизация; регуляризация; итерационный алгоритм.
Рассматривается задача вычисления минимального значения скалярного параметра, при котором зависящая от этого параметра система невыпуклых неравенств имеет решение в пределах заданного множества. Само это решение также подлежит нахождению. В случае, когда оно не единственно, достаточно найти любое из решений. При этом точные данные о системе и о множестве допустимых решений неизвестны, доступны некоторые их приближения. Для решения задачи предлагается регуляризирующий итерационный алгоритм, основанный на принципе экстремального сдвига Н.Н. Красовского.